

1/ Limite - Continuité

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in V_{x_0} : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
- f continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- Calcul de limite

* Si $|f(x, y) - l| \leq g(x, y)$ et $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = 0$ alors $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l$

* On pose $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0$

$$|f(x, y)| = |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq g(r)$$

- Si f, g sont continues sur Ω alors de même $f+g$ et λf

2/ Différentiabilité

- f est différentiable en $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists$ une application linéaire notée $L_{x_0} = df_{x_0}$ de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}

$$f(x) = f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) + \varepsilon_{x_0}(x - x_0) \|x - x_0\|$$

$$\text{ou } \varepsilon_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon_{x_0}(x - x_0) = 0$$

(Autre expression : $f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + \varepsilon_{x_0}(h) \|h\|$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_{x_0}(h) = 0$)

- f est différentiable dans $\Omega \Leftrightarrow f$ est différentiable en tout point de Ω
- Approximation : au voisinage de x_0 : $f(x) \simeq f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0)$
- Si f est différentiable au point x_0 alors f est continue en x_0

3/ Dérivées partielles

a/ D'ordre 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

b/ Dérivées partielles d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

c/ Proposition: Si f est différentiable au point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ alors f admet des dérivées partielles par rapport à chacune des x_i

d/ Theoreme: Si f admet des dérivées partielles continues en x_0 alors f est différentiable en x_0 (la réciproque est fausse)

e/ Fonction de classe C^1 :

On dit que f est continûment différentiable (ou de classe C^1) dans Ω si elle admet en chaque point de Ω des dérivées partielles continues.

f/ Theoreme de Schwarz

Si f admet des dérivées partielles seconde continues en $(x_0, y_0) \in \Omega$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

g/ Différentielle de f : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
 l'expression: $df_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$ s'appelle différentielle de f

* Différentielle de la composée:

Si $z = f(x, y)$ où $x = \varphi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$ alors

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{et} \quad dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

h/ Theoreme des accroissements finis

Soit f une fonction numérique différentiable dans Ω ouvert de \mathbb{R}^n

$\forall a \in \Omega, \forall a+h \in \Omega : \exists \theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h) \quad \text{où } h = (h_1, \dots, h_n)$$

i/ Formule de Taylor à l'ordre 3 au voisinage de (x_0, y_0) (2)

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x_0, y_0) + \\ + \frac{1}{2!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(x_0, y_0) + \frac{1}{3!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 f(x_0 + \theta(x-x_0), y_0 + \theta(y-y_0))$$

$0 < \theta < 1$

j/ Formule de Mac-Laurin à l'ordre 3 au voisinage de $(0, 0)$

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!} \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right] f(0, 0) + \frac{1}{2!} \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(0, 0) + \\ + \frac{1}{3!} \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 f(0, 0) \quad 0 < \theta < 1$$

4/ Application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p

• $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$

• $p_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto p_i(x) = x_i$

alors $f_i = p_i \circ f, 1 \leq i \leq p$

a/ Continuité : f est continue en $x_0 \in \Omega \iff f_i$ est continue en $x_0 \forall i$

b/ Differentiable : f est différentiable en $x \in \Omega \iff f_i$ est différentiable en $x \forall i$

c/ Classe C^q : f est de classe C^q sur $\Omega \iff f_i$ est de classe C^q sur $\Omega \forall i$

d/ Dérivation de fonctions composées

Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$

alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_k}(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)$$

e/ Matrice jacobienne de f au point x_0 :

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Jacobien de f en x_0 (qd $n=p$)

$$\det Jf(x_0) = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$$

2 exemples usuels

• $f: [0, +\infty[\times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(r, \theta) \longrightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \det Jf = r$

• $f: [0, +\infty[\times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $(r, \theta, \varphi) \longrightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi)$
 $\det Jf = r^2 \cos \varphi$

5/ Extremum local

a/ Définition: f admet un minimum (maximum) local au point a
 $\Leftrightarrow \exists$ un voisinage V de a tel que $\forall x \in V : f(x) \geq f(a) \text{ (} f(x) \leq f(a) \text{)}$

b/ Condition nécessaire (d'existence)

f fonction définie sur Ω ouvert de \mathbb{R}^n différentiable en a
 Si f admet un extremum en a alors $df_a = 0$ car $\forall i: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$
 Les points qui annulent les dérivées partielles s'appellent : points stationnaires

c/ Condition suffisante (Cas $n=2$)

Matrice hessienne $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$
 $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$

$D = \det H = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2$

Alors: si $D < 0$ alors (x_0, y_0) n'est pas extremum
 si $D > 0$ et $r < 0$ ou $t < 0$ alors (x_0, y_0) maximum
 si $D > 0$ et $r > 0$ ou $t > 0$ alors (x_0, y_0) minimum
 si $D = 0$, on ne peut pas conclure

6/ Theoreme des fonctions implicites ($n=2$)

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, f de classe C^1 sur un voisinage de (x_0, y_0)
 telle que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Alors $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ l'équation $f(x, y) = 0$
 admet une unique solution $y = \varphi(x)$ dans $]y_0 - \beta, y_0 + \beta[$
 φ est de C^1 et $y_0 = \varphi(x_0)$ et $\varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$

Méthode de calcul de limite

M1: Si $|f(x,y) - l| \leq g(x,y)$

et si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f = l$

M2: $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \quad |f(x,y) - l| \leq g(r)$

si $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f = l$

M3: Pour montrer qu'une limite n'existe pas il suffit de choisir 2 courbes (directions) qui donnent 2 limites différentes



ETU UP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Diapo
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..